Gegeben sei die Funktionenschar f_t mit $f_t(x) = (t-x)\cdot e^x$ mit $t \in IR$.

Lösung zur Aufg. 1:

Bestimmen Sie die Definitionsmenge von f_t und untersuchen Sie die Funktion auf ihr Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs.

$D_f = IR$ für alle $t \in IR$, $f_t(x)$ für alle $x \in IR$ und alle $t \in IR$ definiert ist.

$f_t(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ und $f_t(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$

Lösung zur Aufg. 2:

Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen von f_t mit den Achsen, die Extrempunkte und mögliche Wendepunkte.

<u>Schnittpunkt mit der y-Achse</u>: $f_t(0) = (t-0)e^0 = t \quad \Rightarrow \quad Y(0|t)$

<u>Schnittpunkte mit der x-Achse:</u> $f_t(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = (t-x)\cdot e^x \quad \Leftrightarrow 0 = t-x \quad \Leftrightarrow x = t \qquad$ (da $e^x \neq 0$ f.a. $x \in D_f$)

$\Rightarrow \quad N(t|0)$

<u>Extrema:</u>

$f_t`(x) = -1\cdot e^x + (t-x)\cdot e^x = e^x(-1+t-x)$

$f_t`(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = e^x(-1+t-x) \quad \Leftrightarrow \quad -1+t-x = 0 \quad \Leftrightarrow x = t-1$ mögliche Extremstelle: $x_E = t-1$

$f_t``(x) = e^x\cdot(-1+t-x) + e^x\cdot(-1) = e^x(-2+t-x)$

$f_t``(t-1) = e^{t-1}(-2+t-(t-1)) = e^{t-1}(-1) = -e^{t-1} < 0 \quad \Rightarrow$ HP bei $x = t-1$

$f_t(t-1) = (t-(t-1))e^{t-1} = e^{t-1} \qquad \Rightarrow \qquad H(t-1|e^{t-1})$

<u>Wendepunkte:</u>

$f_t``(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = e^x(-2+t-x) \quad \Leftrightarrow -2+t-x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = t-2$

$f_t```(x) = e^x(-2+t-x) + e^x(-1) = e^x(-3+t-x)$

$f_t```(t-2) = e^{t-2}(-3+t-(t-2)) = e^{t-2}(-1) = -e^{t-2} \neq 0 \quad \Rightarrow$ WP bei $x_w = t-2$

$f_t(t-2) = (t-(t-2))e^{t-2} = 2\cdot e^{t-2} \quad \Rightarrow \quad WP(t-2|2e^{t-2})$

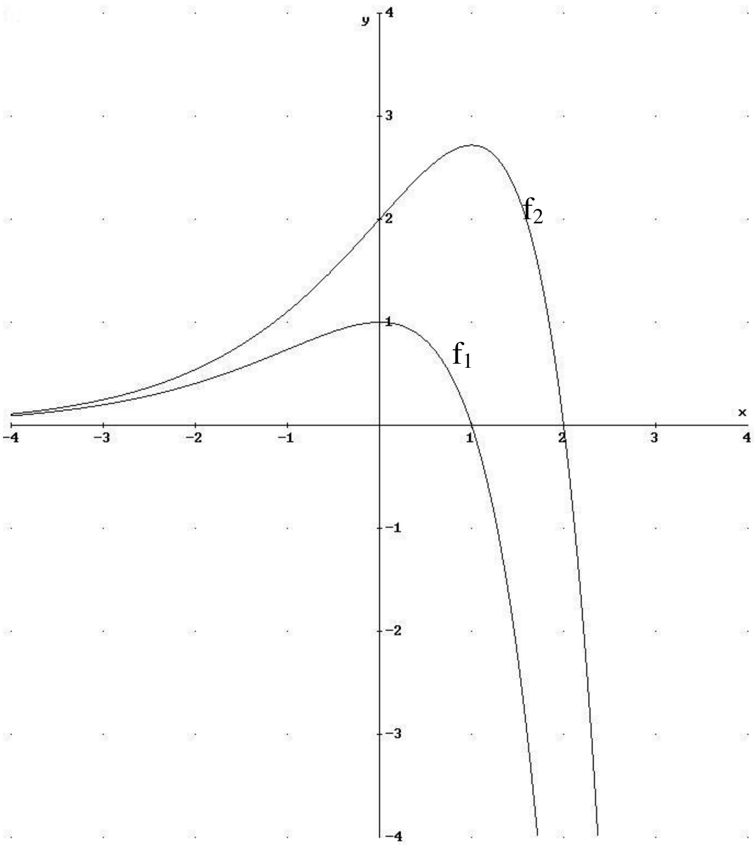
$W_{f_t} = IR_{\leq e^{t-2}}$ da e^{t-2} der maximale Funktionswert ist, zusätzlich: Aufg. 1: Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Lösung zur Aufg. 3:

Zeichnen Sie unter Verwendung der Erkenntnisse aus den Aufg. 1 und 2 die Graphen von f_1 und f_2 in ein Koordinatensystem im Intervall [-4;3].

weitere Punkte:

x	**3**	**-3**	**-4**
f_1 (x)	-40,17	0,2	0,09
f_2 (x)	-20,09	0,25	0,11



Lösung zur Aufg. 4:

Seien $t_1 ; t_2 \in$ IR mit $t_1 \neq t_2$. Überprüfen Sie, ob sich die Graphen von f_{t_1} und f_{t_2} schneiden.

Annahme: Es existiert $x \in D_{f_t}$ mit $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$

$f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x) \Leftrightarrow (t_1 - x) \cdot e^x = (t_2 - x) \cdot e^x \Leftrightarrow t_1 - x = t_2 - x$ (da $e^x \neq 0$) $\Leftrightarrow t_1 = t_2$ Widerspruch! Also existiert kein $x \in D_{f_t}$ mit $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$, somit existiert kein Schnittpunkt der Graphen.

Lösung zur Aufg. 5:

Eine Tangente an den Graphen von f_t im Wendepunkt (sog. Wendetangente) schneidet die x-Achse im Punkt A_t. Der Schnittpunkt des Graphen von f_t mit der x-Achse sei B_t. Zeigen Sie, dass der Abstand von A_t zu B_t nicht von t abhängt.

Aufstellen der Tangentengleichung: $y = mx + n$ $m, n \in$ IR in WP$(t-2|2e^{t-2})$

$m = f_t`(t-2) = (-1+t-(t-2))e^{t-2} = e^{t-2} \Rightarrow y = e^{t-2} \cdot x + n$

$\Rightarrow 2 \cdot e^{t-2} = e^{t-2} \cdot (t-2) + n$

$\Leftrightarrow 2 \cdot e^{t-2} = t \cdot e^{t-2} - 2 \cdot e^{t-2} + n$

$\Leftrightarrow 2 \cdot e^{t-2} - t \cdot e^{t-2} + 2 \cdot e^{t-2} = n$

$\Leftrightarrow 4 \cdot e^{t-2} - t \cdot e^{t-2} = n \Rightarrow$ Tangentengleichung: $y = e^{t-2} \cdot x + (4e^{t-2} - te^{t-2})$

B_t hat als x-Koordinate die Nullstelle der Tangentengleichung:

$y=0 \Leftrightarrow 0 = e^{t-2} \cdot x + (4e^{t-2} - te^{t-2}) \Leftrightarrow e^{t-2} \cdot x = -4e^{t-2} + te^{t-2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-4e^{t-2} + te^{t-2}}{e^{t-2}} = \dfrac{e^{t-2}(t-4)}{e^{t-2}} = t-4$

Also: $B_t(t-4|0)$ A_t ergibt sich aus Aufgabe 2: $A_t(t|0)$

Abstand d: $d = |t-(t-4)| = 4$ LE.

Der Abstand von A_t und B_t beträgt unabhängig von t für jede Funktion f_t jeweils 4 LE.

Lösung zur Aufg. 6:

a) Beweisen Sie, dass die Funktion F_t mit $F_t(x) = -e^x \cdot (x-t-1)$ eine Stammfunktion von f_t ist.

b) Überlegen Sie sich, wie man die Funktion F_t hätte ermitteln können.

a) $F_t`(x) = -e^x \cdot (x-t-1) + (-e^x) \cdot 1 = -e^x \cdot x + t \cdot e^x + e^x - e^x = -e^x \cdot x + t \cdot e^x = e^x \cdot (-x+t) = e^x \cdot (t-x) = f_t(x)$

b) Wir formen die Funktionsgleichung $f_t(x) = (t-x) \cdot e^x$ um : $f_t(x) = e^x\,(0+t-x)\cdot$

$f_t(x) = e^x(\,0+t-x)\cdot$

$f_t`(x) = e^x(-1+t-x)$

$f_t``(x) = e^x(-2+t-x)$

$f_t```(x) = e^x(-3+t-x)$

Offensichtlich muss für die Funktion, deren Ableitungsfunktion f_t ist (also eine Stammfunktion F_t), gelten: $e^x(+1+t-x) = e^x(-1)(-1-t+x) = -e^x(x-t-1) = F_t(x)$

Lösung zur Aufg. 7:

a) Sei $t \in \mathrm{IR}_{\geq 0}$. Bestimmen Sie den Inhalt der nach links unbegrenzten Fläche, die im 2. Quadranten von der x-Achse, der y-Achse und dem Graphen von f_t eingeschlossen wird.

b) Nun sei $t \in \mathrm{IR}_{<0}$. Bestimmen Sie den Inhalt der nach links offenen Fläche, die im 2. Quadranten von der x-Achse und dem Graphen von f_t eingeschlossen wird.

a) Sei $b \in \mathrm{IR}_{<0}$:

$$A_{[b;0]} = \int_b^0 f_t(x)dx = F(b)-F(0) = -e^0(0-t-1) - [-e^b(b-t-1)] = t+1+e^b \cdot b - e^b t - e^b \xrightarrow[b \to -\infty]{} t+1$$

(mit Taschenrechner bestimmen). Der Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von $t \in \mathrm{IR}_{\geq 0}$) A = t+1 FE.

b) Die Nullstelle für f_t beträgt $x_N = t$. Sei $b \in \mathrm{IR}_{<t}$.

$$A_{[b;t]} = \int_b^t f_t(x)dx = F(t)-F(b) = -e^t(t-t-1) - [-e^b(b-t-1)] = e^t - [-e^b(b-t-1)] \xrightarrow[x \to -\infty]{} e^t$$

Der Flächeninhalt beträgt (in Abhängigkeit von $t \in \mathrm{IR}_{<0}$) $A = e^t$ FE.